

62. A partir de la gráfica de la función  $y = f(x)$  dada en la FIGURA 4.3.7, trace la gráfica de  $f'$ .

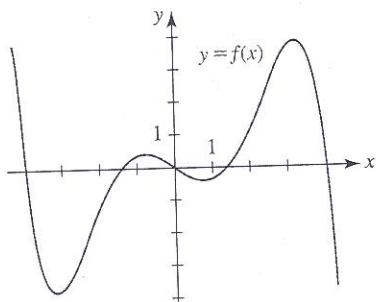


FIGURA 4.3.7 Gráfica para el problema 62

63. Encuentre una función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tal que  $f(-1) = -11$ ,  $f'(-1) = 7$  y  $f''(-1) = -4$ .
64. Se dice que las gráficas de  $y = f(x)$  y  $y = g(x)$  son **ortogonales** si las rectas tangentes a cada gráfica son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las gráficas de  $y = \frac{1}{8}x^2$  y  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$  son ortogonales.
65. Encuentre los valores de  $b$  y  $c$  de modo que la gráfica de  $f(x) = x^2 + bx$  tenga la recta tangente  $y = 2x + c$  en  $x = -3$ .
66. Encuentre una ecuación de la(s) recta(s) que pasa(n) por  $(\frac{3}{2}, 1)$  y es (son) tangente(s) a la gráfica de  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ .
67. Encuentre los puntos de la gráfica de  $f(x) = x^2 - 5$  tal que la línea tangente a los puntos interseque al eje en  $(-3, 0)$ .
68. Encuentre el o los puntos sobre la gráfica de  $f(x) = x^2$  tal que la recta tangente interseque al eje  $y$  en  $(0, -2)$ .
69. Explique por qué la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3$  no tiene recta tangente con pendiente  $-1$ .
70. Encuentre coeficientes  $A$  y  $B$  de modo que la función  $y = Ax^2 + Bx$  satisfaga la ecuación diferencial  $2y'' + 3y' = x - 1$ .
71. Encuentre valores de  $a$  y  $b$  tales que la pendiente de la tangente a la gráfica de  $f(x) = ax^2 + bx$  en  $(1, 4)$  sea  $-5$ .
72. Encuentre las pendientes de todas las rectas normales a la gráfica de  $f(x) = x^2$  que pasan por el punto  $(2, 4)$ . [Sugerencia: Elabore una figura y observe que en  $(2, 4)$  sólo hay una recta normal.]
73. Encuentre un punto sobre la gráfica de  $f(x) = x^2 + x$  y un punto sobre la gráfica de  $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$  donde las rectas tangentes son paralelas.
74. Encuentre un punto sobre la gráfica de  $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 2x$  donde la recta tangente tiene la menor pendiente posible.

75. Encuentre las condiciones sobre los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de modo que la gráfica de la función polinomial

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tenga exactamente una tangente horizontal. Exactamente dos tangentes horizontales. Ninguna tangente horizontal.

76. Sea  $f$  una función diferenciable. Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ , trace gráficas posibles de  $f$  sobre el intervalo. Describa verbalmente el comportamiento de la gráfica de  $f$  sobre el intervalo. Repita si  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ .
77. Suponga que  $f$  es una función diferenciable tal que  $f'(x) - f(x) = 0$ . Encuentre  $f^{(100)}(x)$ .

78. Las gráficas de  $y = x^2$  y  $y = -x^2 + 2x - 3$  dada por la FIGURA 4.3.8 muestran que hay dos rectas  $L_1$  y  $L_2$  que son simultáneamente tangentes a ambas gráficas. Encuentre los puntos de tangencia de ambas gráficas. Encuentre una ecuación para cada recta tangente.

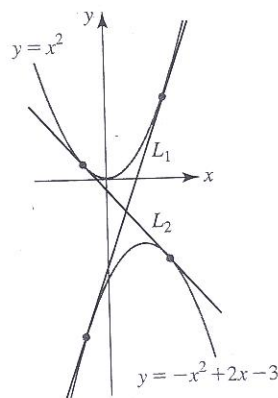


FIGURA 4.3.8 Gráficas para el problema 78

### ≡ Problemas con calculadora/SAC

79. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 2$ .
- b) Evalúe  $f''(x)$  en  $x = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  y  $x = 4$ .
- c) A partir de los datos del inciso b), ¿observa alguna relación entre la forma de la gráfica de  $f$  y los signos algebraicos de  $f''$ ?
80. Use una calculadora o un sistema algebraico computacional para obtener la gráfica de las funciones dadas. Por inspección de las gráficas, indique dónde cada función puede no ser diferenciable. Encuentre  $f'(x)$  para todos los puntos donde  $f$  es diferenciable.
- a)  $f(x) = |x^2 - 2x|$       b)  $f(x) = |x^3 - 1|$

## 4.4 Derivada de productos y cocientes

■ **Introducción** Hasta el momento sabemos que la derivada de una función constante y una potencia de  $x$  son, a su vez:

$$\frac{d}{dx} c = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$

También sabemos que para funciones diferenciables  $f$  y  $g$ :

$$\frac{d}{dx}cf(x) = cf'(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x). \quad (2)$$

Aunque los resultados en (1) y (2) nos permiten diferenciar rápidamente funciones algebraicas (como polinomios), ni (1) ni (2) constituyen una ayuda inmediata para encontrar la derivada de funciones como  $y = x^4\sqrt{x^2 + 4}$  o  $y = x/(2x + 1)$ . Se requieren reglas adicionales para diferenciar productos  $fg$  y cocientes  $f/g$ .

**Regla del producto** Las reglas de diferenciación y las derivadas de funciones surgen en última instancia de la definición de la derivada. La regla de la suma en (2), que se obtuvo en la sección precedente, se concluye de la definición y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites siempre que los límites existan. También sabemos que cuando los límites existen, el límite de un producto es el producto de los límites. Al razonar por analogía, parecería plausible que la derivada de un producto de dos funciones es el producto de las derivadas. Lamentablemente, la regla del producto que se presenta a continuación *no es* tan simple.

#### Teorema 4.4.1 Regla del producto

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$ , entonces  $fg$  es diferenciable en  $x$ , y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \quad (3)$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $G(x) = f(x)g(x)$ . Entonces por la definición de la derivada junto con algo de manipulación algebraica:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - \overbrace{f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}^{\text{cero}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Debido a que  $f$  es diferenciable en  $x$ , es continua ahí y entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$ . Además,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x) = g(x)$ . Por tanto, la última ecuación se vuelve

$$G'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

La regla del producto se memoriza mejor en palabras:

- La primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

#### EJEMPLO 1 Regla del producto

Diferencie  $y = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$ .

**Solución** De la regla del producto (3),

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \overbrace{(x^3 - 2x^2 + 3)}^{\text{primera}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(7x^2 - 4x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(7x^2 - 4x)}^{\text{segunda}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3)}^{\text{derivada de la primera}} \\ &= (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x) \\ &= 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12. \end{aligned}$$



**Solución alterna** Los dos términos en la función dada pueden multiplicarse para obtener un polinomio de quinto grado. Luego, la derivada puede obtenerse usando la regla de la suma. ■

### EJEMPLO 2 Recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = (1 + \sqrt{x})(x - 2)$  en  $x = 4$ .

**Solución** Antes de tomar la derivada,  $\sqrt{x}$  volvemos a escribirla como  $x^{1/2}$ . Luego, por la regla del producto (3),

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (1 + x^{1/2}) \frac{d}{dx}(x - 2) + (x - 2) \frac{d}{dx}(1 + x^{1/2}) \\ &= (1 + x^{1/2}) \cdot 1 + (x - 2) \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{3x + 2\sqrt{x} - 2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Al evaluar la función dada y su derivada en  $x = 4$  obtenemos:

$$\begin{aligned}y(4) &= (1 + \sqrt{4})(4 - 2) = 6 \quad \leftarrow \text{el punto de tangencia es } (4, 6) \\ \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=4} &= \frac{12 + 2\sqrt{4} - 2}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{2}. \quad \leftarrow \text{la pendiente de la tangente en } (4, 6) \text{ es } \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Por la forma punto-pendiente, la recta tangente es

$$y - 6 = \frac{7}{2}(x - 4) \quad \text{o bien,} \quad y = \frac{7}{2}x - 8. \quad \blacksquare$$

Aunque (3) se ha planteado sólo para el producto de dos funciones, puede aplicarse a funciones con un mayor número de factores. La idea consiste en agrupar dos (o más) funciones y tratar este agrupamiento como una función. El siguiente ejemplo ilustra la técnica.

### EJEMPLO 3 Producto de tres funciones

Diferencie  $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 - 8x)$ .

**Solución** Los dos primeros factores se identifican como la “primera función”:

$$\frac{dy}{dx} = \overbrace{(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{primera}} \overbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 8x)}^{\text{derivada de la segunda}} + \overbrace{(x^3 - 8x)}^{\text{segunda}} \overbrace{\frac{d}{dx}(4x + 1)(2x^2 - x)}^{\text{derivada de la primera}}.$$

Observe que para encontrar la derivada de la primera función es necesario aplicar la regla del producto por segunda ocasión:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (4x + 1)(2x^2 - x) \cdot (3x^2 - 8) + (x^3 - 8x) \cdot \overbrace{[(4x + 1)(4x - 1) + (2x^2 - x) \cdot 4]}^{\text{De nuevo la regla del producto}} \\ &= (4x + 1)(2x^2 - x)(3x^2 - 8) + (x^3 - 8x)(16x^2 - 1) + 4(x^3 - 8x)(2x^2 - x). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

■ **Regla del cociente** A continuación se presenta la derivada del cociente de dos funciones  $f$  y  $g$ .

#### Teorema 4.4.2 Regla del cociente

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es diferenciable en  $x$ , y

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad (4)$$

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $G(x) = f(x)/g(x)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)f(x+h) - \overbrace{g(x)f(x) + g(x)f(x)}^{\text{cero}} - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x)}.
 \end{aligned}$$

Puesto que se supone que todos los límites existen, la última línea es lo mismo que

$$G'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

En palabras, la regla del cociente empieza con el denominador:

- El denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el denominador al cuadrado.

#### EJEMPLO 4 Regla del cociente

Diferencie  $y = \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 5x^2 + 7}$ .

**Solución** Por la regla del cociente (4),

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{\overbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{denominador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(3x^2 - 1)}^{\text{derivada del numerador}} - \overbrace{(3x^2 - 1)}^{\text{numerador}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}(2x^3 + 5x^2 + 7)}^{\text{derivada del denominador}}}{\underbrace{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}_{\text{cuadrado del denominador}}} \\
 &= \frac{(2x^3 + 5x^2 + 7) \cdot 6x - (3x^2 - 1) \cdot (6x^2 + 10x)}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador} \\
 &= \frac{-6x^4 + 6x^2 + 52x}{(2x^3 + 5x^2 + 7)^2}.
 \end{aligned}$$

#### EJEMPLO 5 Reglas del producto y el cociente

Encuentre los puntos sobre la gráfica de  $y = \frac{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)}{3x^2 + 1}$  donde la recta tangente es horizontal.

**Solución** Se empieza con la regla del cociente y luego se usa la regla del producto al diferenciar el numerador:



$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(3x^2 + 1) \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}[(x^2 + 1)(2x^2 + 1)]}^{\text{Regla del producto aquí}} - (x^2 + 1)(2x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{(3x^2 + 1)[(x^2 + 1)4x + (2x^2 + 1)2x] - (x^2 + 1)(2x^2 + 1)6x}{(3x^2 + 1)^2} \quad \leftarrow \text{se multiplica por el numerador} \\
 &= \frac{12x^5 + 8x^3}{(3x^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

En un punto donde la recta tangente es horizontal, debe tenerse  $dy/dx = 0$ . La derivada que acaba de encontrarse sólo puede ser 0 cuando el numerador satisface

Por supuesto, los valores de  $x$  que hacen cero al numerador *no* deben hacer simultáneamente cero al denominador.

$$12x^5 + 8x^3 = 0 \quad \text{o bien,} \quad x^3(12x^2 + 8) = 0. \quad (5)$$

En (5), debido a que  $12x^2 + 8 \neq 0$  para todos los números reales  $x$ , debe tenerse  $x = 0$ . Al sustituir este número en la función obtenemos  $y(0) = 1$ . La recta tangente es horizontal en la intersección con el eje  $y$ , el punto  $(0, 1)$ .

■ **Posdata: Otro repaso a la regla de potencias** Recuerde que en la sección 4.3 establecimos que la regla de potencias,  $(d/dx)x^n = nx^{n-1}$ , es válida para todos los números reales exponentes  $n$ . Ahora ya nos es posible demostrar la regla cuando el exponente es un entero negativo  $-m$ . Puesto que, por definición  $x^{-m} = 1/x^m$ , donde  $m$  es un entero positivo, la derivada de  $x^{-m}$  puede obtenerse por medio de la regla del cociente y las leyes de los exponentes:

$$\frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}1 - 1 \cdot \frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} = \frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}.$$

se restan los exponentes

$\frac{d}{dx}$

## NOTAS DESDE EL AULA

- i) Las reglas del producto y del cociente suelen conducir a expresiones que demandan simplificación. Si su respuesta a un problema no se parece a la que se proporciona en la sección de respuestas del texto, quizá no ha realizado suficientes simplificaciones. No quede contento con sólo llevar a cabo las partes mecánicas de las diversas reglas de diferenciación; siempre resulta una buena idea poner en práctica sus habilidades algebraicas.
- ii) Algunas veces, la regla del cociente se usa cuando no es necesario. Aunque es posible usar esta regla para diferenciar funciones como

$$y = \frac{x^5}{6} \quad \text{y} \quad y = \frac{10}{x^3},$$

es más simple (y rápido) volver a escribir las funciones como  $y = \frac{1}{6}x^5$  y  $y = 10x^{-3}$ , y luego usar las reglas del múltiplo constante y de potencias:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6} \frac{d}{dx}x^5 = \frac{5}{6}x^4 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = 10 \frac{d}{dx}x^{-3} = -30x^{-4}.$$

## 4.4

### DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-11.

#### ≡ Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre  $dy/dx$ .

1.  $y = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

2.  $y = (7x + 1)(x^4 - x^3 - 9x)$

3.  $y = \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right)$

4.  $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$



5.  $y = \frac{10}{x^2 + 1}$

6.  $y = \frac{5}{4x - 3}$

7.  $y = \frac{3x + 1}{2x - 5}$

8.  $y = \frac{2 - 3x}{7 - x}$

9.  $y = (6x - 1)^2$

10.  $y = (x^4 + 5x)^2$

En los problemas 11-20, encuentre  $f'(x)$ .

11.  $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}\right)(x^3 - 5x - 1)$

12.  $f(x) = (x^2 - 1)\left(x^2 - 10x + \frac{2}{x^2}\right)$

13.  $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 + x + 1}$

14.  $f(x) = \frac{x^2 - 10x + 2}{x(x^2 - 1)}$

15.  $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

16.  $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)(3x^4 + 2x - 1)$

17.  $f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 5)}{3x + 2}$

18.  $f(x) = \frac{x^5}{(x^2 + 1)(x^3 + 4)}$

19.  $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\left(\frac{x + 1}{x + 3}\right)$

20.  $f(x) = (x + 1)\left(x + 1 - \frac{1}{x + 2}\right)$

En los problemas 21-24, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor indicado de  $x$ .

21.  $y = \frac{x}{x - 1}; x = \frac{1}{2}$

22.  $y = \frac{5x}{x^2 + 1}; x = 2$

23.  $y = (2\sqrt{x} + x)(-2x^2 + 5x - 1); x = 1$

24.  $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3); x = 0$

En los problemas 25-28, encuentre el o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente es horizontal.

25.  $y = (x^2 - 4)(x^2 - 6)$

26.  $y = x(x - 1)^2$

27.  $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$

28.  $y = \frac{1}{x^2 - 6x}$

En los problemas 29 y 30, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la pendiente indicada.

29.  $y = \frac{x + 3}{x + 1}; m = -\frac{1}{8}$

30.  $y = (x + 1)(2x + 5); m = -3$

En los problemas 31 y 32, encuentre el punto o los puntos sobre la gráfica de la función dada donde la recta tangente tiene la propiedad indicada.

31.  $y = \frac{x + 4}{x + 5}$ ; perpendicular a  $y = -x$

32.  $y = \frac{x}{x + 1}$ ; paralela a  $y = \frac{1}{4}x - 1$

33. Encuentre el valor de  $k$  tal que la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = (k + x)/x^2$  tiene pendiente 5 en  $x = 2$ .

34. Demuestre que la tangente a la gráfica de  $f(x) = (x^2 + 14)/(x^2 + 9)$  en  $x = 1$  es perpendicular a la tangente de la gráfica de  $g(x) = (1 + x^2)(1 + 2x)$  en  $x = 1$ .

En los problemas 35-40,  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables. Encuentre  $F'(1)$  si  $f(1) = 2$ ,  $f'(1) = -3$  y  $g(1) = 6$ ,  $g'(1) = 2$ .

35.  $F(x) = 2f(x)g(x)$

36.  $F(x) = x^2f(x)g(x)$

37.  $F(x) = \frac{2g(x)}{3f(x)}$

38.  $F(x) = \frac{1 + 2f(x)}{x - g(x)}$

39.  $F(x) = \left(\frac{4}{x} + f(x)\right)g(x)$

40.  $F(x) = \frac{xf(x)}{g(x)}$

41. Suponga que  $F(x) = \sqrt{x}f(x)$ , donde  $f$  es una función diferenciable. Encuentre  $F''(4)$  si  $f(4) = -16$ ,  $f'(4) = 2$  y  $f''(4) = 3$ .

42. Suponga que  $F(x) = xf(x) + xg(x)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables. Encuentre  $F''(0)$  si  $f'(0) = -1$  y  $g'(0) = 6$ .

43. Suponga que  $F(x) = f(x)/x$ , donde  $f$  es una función diferenciable. Encuentre  $F''(x)$ .

44. Suponga que  $F(x) = x^3f(x)$ , donde  $f$  es una función diferenciable. Encuentre  $F'''(x)$ .

En los problemas 45-48, determine intervalos para los cuales  $f'(x) > 0$  e intervalos para los cuales  $f'(x) < 0$ .

45.  $f(x) = \frac{5}{x^2 - 2x}$

46.  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

47.  $f(x) = (-2x + 6)(4x + 7)$

48.  $f(x) = (x - 2)(4x^2 + 8x + 4)$

### ≡ Aplicaciones

49. La ley de gravitación universal establece que la fuerza  $F$  entre dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  separados por una distancia  $r$  es  $F = km_1m_2/r^2$ , donde  $k$  es constante. ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de  $F$  con respecto a  $r$  cuando  $r = \frac{1}{2} \text{ km}$ ?

50. La energía potencial  $U$  entre dos átomos en una molécula diatómica está dada por  $U(x) = q_1/x^{12} - q_2/x^6$ , donde  $q_1$  y  $q_2$  son constantes positivas y  $x$  es la distancia entre los átomos. La fuerza entre los átomos se define como  $F(x) = -U'(x)$ . Demuestre que  $F(\sqrt[6]{2q_1/q_2}) = 0$ .

51. La ecuación de estado de Van der Waals para un gas ideal es

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

donde  $P$  es la presión,  $V$  es el volumen por mol,  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  es la temperatura y  $a$  y  $b$  son constantes que dependen del gas. Encuentre  $dP/dV$  en el caso donde  $T$  es constante.

52. Para una lente convexa, la distancia focal  $f$  está relacionada con la distancia al objeto  $p$  y la distancia a la imagen  $q$  por la ecuación de la lente

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Encuentre la razón de cambio instantánea de  $q$  con respecto a  $p$  en el caso donde  $f$  es constante. Explique el significado del signo negativo en su respuesta. ¿Qué ocurre a  $q$  cuando  $p$  crece?



≡ Piense en ello

53. a) Grafique la función racional  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ .

b) Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de  $f$  tales que las rectas normales pasen por el origen.

54. Suponga que  $y = f(x)$  es una función diferenciable.

a) Encuentre  $dy/dx$  para  $y = [f(x)]^2$ .

b) Encuentre  $dy/dx$  para  $y = [f(x)]^3$ .

c) Conjeture una regla para encontrar la derivada de  $y = [f(x)]^n$ , donde  $n$  es un entero positivo.

d) Use su conjetura en el inciso c) para encontrar la derivada de  $y = (x^2 + 2x - 6)^{500}$ .

55. Suponga que  $y_1(x)$  satisface la ecuación diferencial  $y' + P(x)y = 0$ , donde  $P$  es una función conocida. Demuestre que  $y = u(x)y_1(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$y' + P(x)y = f(x)$$

siempre que  $u(x)$  satisface  $du/dx = f(x)/y_1(x)$ .

## 4.5 Derivada de funciones trigonométricas

**Introducción** En esta sección desarrollaremos las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Una vez que se han encontrado las derivadas de  $\sin x$  y  $\cos x$  es posible determinar las derivadas de  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  y  $\csc x$  usando la regla del cociente encontrada en la sección precedente. De inmediato veremos que la derivada de  $\sin x$  usa los dos siguientes resultados de límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad (1)$$

que se encontraron en la sección 3.4.

**Derivadas del seno y coseno** Para encontrar la derivada de  $f(x) = \sin x$  se usa la definición básica de la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

y el proceso de cuatro pasos introducido en las secciones 4.1 y 4.2. En el primer paso usamos la fórmula de la suma para la función seno,

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2, \quad (3)$$

pero donde  $x$  y  $h$  desempeñan las partes de los símbolos  $x_1$  y  $x_2$ .

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x+h) &= \sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h && \leftarrow \text{por (3)} \\ \text{ii) } f(x+h) - f(x) &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x && \leftarrow \text{se factoriza } \sin x \\ &= \sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h && \text{de los términos} \\ & && \text{primero y tercero} \end{aligned}$$

Como observamos en la línea siguiente, no es posible cancelar las  $h$  en el cociente diferencial, aunque es posible volver a escribir la expresión para usar los resultados sobre límites en (1).

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

iv) En esta línea, el símbolo  $h$  desempeña la parte del símbolo  $x$  en (1):

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}.$$

A partir de los resultados sobre límites en (1), la última línea es lo mismo que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$